Portfoliotheorie (H. Markowitz/ J. Tobin) :

Warum sollte man nicht alle Eier in einen Korb legen?

Gliederung:

1. Allgemeines:

Die Moderne Portfolio Theorie wurde 1952 vom Amerikaner Harry.M. Markowitz begründet. Er wurde für seine Portfolio-Theorie 1990 mit dem Nobelpreis ausgezeichnet. Seine Arbeiten beweisen, dass durch die optimale Streuung von Risiken (auch Diversifikation genannt) wesentlich höhere Renditen bei geringerem Risiko erzielt werden können.

1.1 Definition des Begriffs Portfolio:

- ❖ Portfolio, auch auf Deutsch Portefeuille genannt, ist die Gesamtheit bzw. der Gesamtbestand aller gehaltenen Wertpapiere oder Anlagen.

- ❖ Die mit dem Geld erworbenen Anlageobjekte werden allgemein als Assets bezeichnet.
- ❖ Die einzelnen Assets werden mit Hilfe von 3 Merkmalen, nämlich **Rendite**, **Risiko** und **Liquidität**, beschrieben.

1.1.1 Rendite

❖ Das mit einer Geldanlage über eine gewisse Zeitdauer hinweg erzielte Ergebnis in Relation zum anfänglich investierten Betrag wird als Rendite bezeichnet.

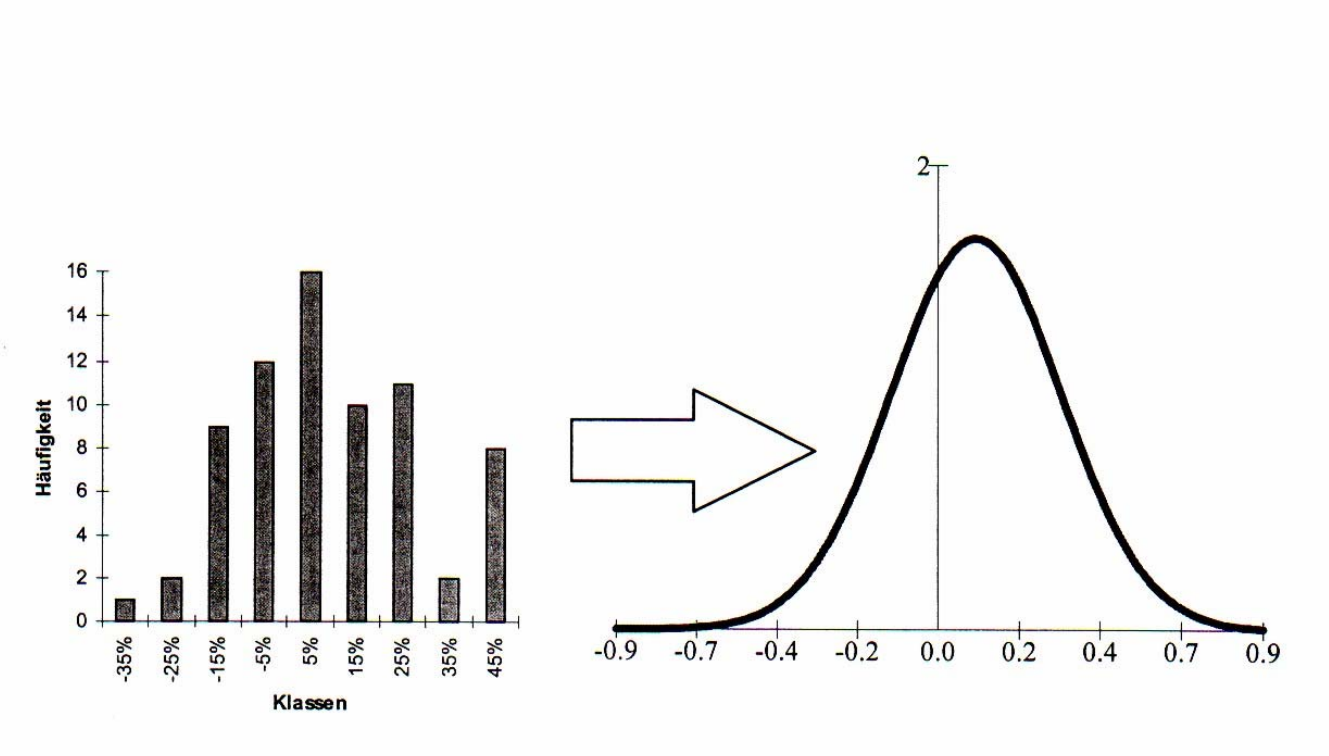
❖ Die **zukünftige Rendite** (zu erwartende Rendite) wird zum Zeitpunkt der Entscheidung des Investors in aller Regel nicht angeben, weil nicht alle Faktoren bekannt sind. In der Praxis wird deshalb häufig der Durchschnittswert der historischen Renditen einer Anlage als zukünftige Rendite herangezogen.

❖ Markowitz geht davon aus, dass es sich bei der erwarteten Rendite einer Aktie um eine Zufallsgröße handelt, die innerhalb bestimmter Grenzen zufällig schwankt. Der Erwartungswert für den Ertrag einer Aktie ist gleich dem arithmetischen Mittel der möglichen Erträge gewichtet mit deren Eintrittswahrscheinlichkeiten. Aus der Vergangenheit können die Verteilungsparameter geschätzt werden. Anhand des Abb. 1 und Abb.2 wird der Verteilungstyp der Renditen als **Normalverteilung** bestimmt.

-40% … -30%	-30% bis -20%	-20% bis -10%	-10% bis 0%	0% bis 10%	10% bis 20%	20% bis 30%	30% bis 40%	mehr als 40%
				1986				
				1984				
				1980				
				1977				
				1976	2000			
			1994	1969	1999			
			1978	1952	1998	1995		
			1965	1950	1996	1989		
		1990	1964	1947	1992	1988		
		1981	1963	1946	1991	1983		1997
		1973	1956	1944	1982	1972		1993
		1970	1955	1942	1979	1959		1985
		1966	1948	1940	1971	1958		1975
		1962	1943	1938	1953	1954		1967
	2001	1957	1934	1937	1951	1928		1961
	1987	1939	1930	1933	1949	1927	1968	1960
1974	1931	1935	1929	1932	1945	1926	1941	1936

Abb.1: Das Histogramm der Aktienrenditen für die Schweiz von 1926 bis 2001

Abb. 2: Das Histogramm der historischen Renditen auf ein Aktienportfolio



Quelle: Spremann, K. (2003): Portfoliomanagement, 2. Auflage, S. 130

Die Formel des Erwartungswertes: $$E(r) = \sum_{i=1}^{n} p_i * r_i \qquad (1)$$

Wobei $$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

p: Eintrittswahrscheinlichkeit des Zustands

Der Erwartungswert der Portfoliorendite ist gleich der Summe der wahrscheinlichsten Renditen der Einzelwert, gewichtet mit ihren Anteilen am Portfolio.

Die Formel wird wie unten bezeichet:

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i * r_i = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ \ldots \\ r_n \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Wobei $$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

E: der Erwartungswert der Portefeuillerendite
xi: Anteil der Investitionssumme, den der Investor in die Aktiensorte i investiert.
E(ri): erwartete Rendite der Anlage i (Einzelrendite)

Beispiel:

Frau J möchte in 2 Finanzanlagen investieren. Sie kann für die risikobehaftete Finanzanlage A 100€ anlegen und für die risikobehaftete Finanzanlage B 200€ investieren. Bei Finanzanlage A: Wenn alles gut geht, kann sie einen Ertrag als 20% davon erzielen, sonst werden nur 80% davon bleiben. Bei Finanzanlage B: Wenn alles gut läuft, kann mit einem Ertrag von 50% gerechnet werden. Wenn es schlecht geht, erhält sie nur 75% davon. Die Wahrscheinlichkeiten sind gleich, nämlich $P_1=P_2=0{,}5$.

Das Ergebnis lässt sich wie folgt darstellen:

$E(Ra)=0{,}5*20\%+0{,}5*(-20\%)=0$

$E(Rb)=0{,}5*50\%+0{,}5*(-25\%)=12.5\%$

$E=(100/300)*0+(200/300)*12{,}5\%\approx 8{,}33\%$

1.1.2 Risiko

❖ Markowitz definierte das Risiko als Abweichung des Anlageergebnisses von der Erwartung, nämlich Standardabweichung der Rendite.

❖ Die **Standardabweichung der Rendite** drückt den Risikogehalt einer Anlage aus und ermöglicht einen direkten Vergleich der zur Auswahl stehenden Alternativen. Die Berechnungsschritte werden zunächst vorgestellt:

1. Schritt: Erfassung der historischen Renditen der betrachteten Anlage.
2. Schritt: Bildung des Durchschnittswertes der historischen Renditen.
3. Schritt: Subtraktion des Durchschnittswertes von jedem einzelnen Renditewert aus der Zeitreihe. Der differenzwert wird quadriert. Als Ergebnis erhält man die Zeitreihe der quadrierten Abweichungen.
4. Schritt: Die quadrierten Abweichungen werden addiert.
5. Schritt: Die Summe der quadrierten Abweichungen wird durch die Anzahl der historischen Renditen dividiert.
6. Schritt: Aus dem nach dem 5. Schritt erhaltenen Wert wird die Quadratwurzel gezogen.

Dazu wird ein Beispiel genommen:
Eine Anlage erzielte in den zurückliegenden Jahren folgende Renditen:

2001	2002	2003	2004
6%	4%	9%	5%

1.Schritt: Die Zeitreihe der Renditen läßt sich der Tabelle entnehmen.
2. Schritt: E(R)=1/4 (6%+4%+9%+5%)= 6%
3. Schritt:

r-E(R)	Quadrierung	Resultat
6-6= 0	0^2	0
4-6= -2	$(-2)^2$	4
9-6=3	3^2	9
5-6=-1	$(-1)^2$	1

4. Schritt: 0+4+9+1=14
5. Schritt: Var(R)=14÷4= 3,5
6. Schritt: s= (Var(R))ˆ½ =(3,5)ˆ½≈1,87

Die Standardabweichung der Renditen läßt sich als Formel so schreiben:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(r_i-\mu)^2} \qquad (3)$$

Mit
σ: Standardabweichung der Renditen
n: Anzahl der Einzelrenditen
r_i: i-te Rendite
μ: Mittelwert der Renditen

❖Diversifikation:
Investoren teilen ihr Geld häufig auf diverse Anlagealternativen auf, anstatt eine einzige Anlage zu erwerben. Dieses Vorgehen wird als Diversifikation bezeichnet.

❖ Warum sollte man nicht alle Eier in einen Korb legen?

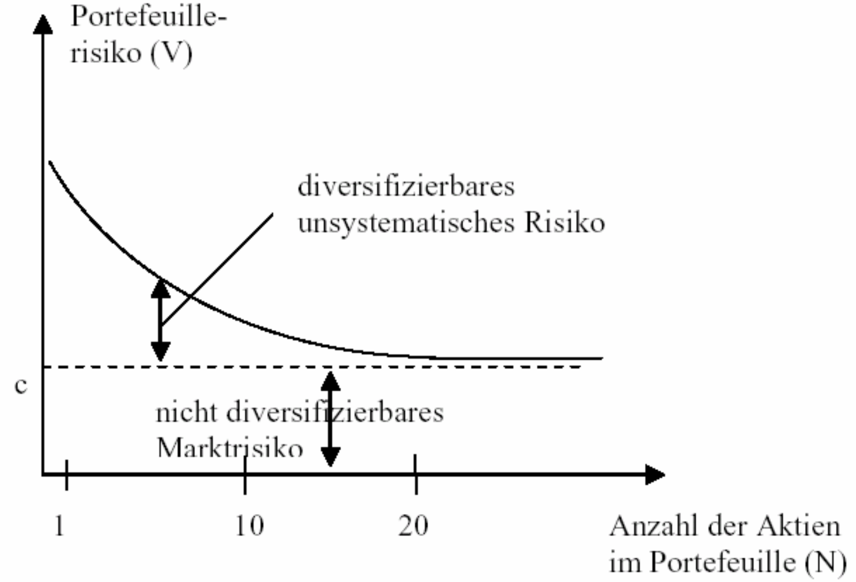
Durch die Diversifikation kann man höhere Renditen bei geringerem Risiko erzielen. Investitionen in ein breit diversifiziertes Portfolio sind weniger riskant, wie die in einzelne Anlage.

❖ Unsystematische und systematische Risiken

Risiken, die im Prinzip mit den zur Verfügung stehenden Instrumenten diversifizierbar wären, heißen unsystematisch.
Nicht weiter diversifizierbare Risiken heißen systematisch.

❖ Rendite-Risiko-Relation (Performance)

Performance bedeutet soviel wie Leistung und setzt sich im Zusammenhang mit der Beurteilung von Anlagen und professionellen Anlegern immer mehr durch.



Quelle: Hielscher, Udo, Investmentanalyse, 1999, S. 60

Abb. 3: Mögliche Risikoreduktion

1.1.3 Liquidität

❖ **Liquidität** wird als die Schnelligkeit und Leichtigkeit, mit der sich eine Anlage zu einem fairen Preis veräußern und damit wieder in Geld verwandeln läßt, bezeichnet.

❖ Grundsätzlich gilt:
Je weniger liquide eine Anlage ist, desto höher ist ihre Rendite.
Je länger der Zeitraum, über den ein Investor sein Geld binden will, desto höher ist die Rendite.
Ein Investor wählt eine Anlage nach den Kriterien Rendite, Risiko und Liquidität aus.
Diesen Zusammenhang bezeichnet man auch als magisches Dreieck der Geldanlage:

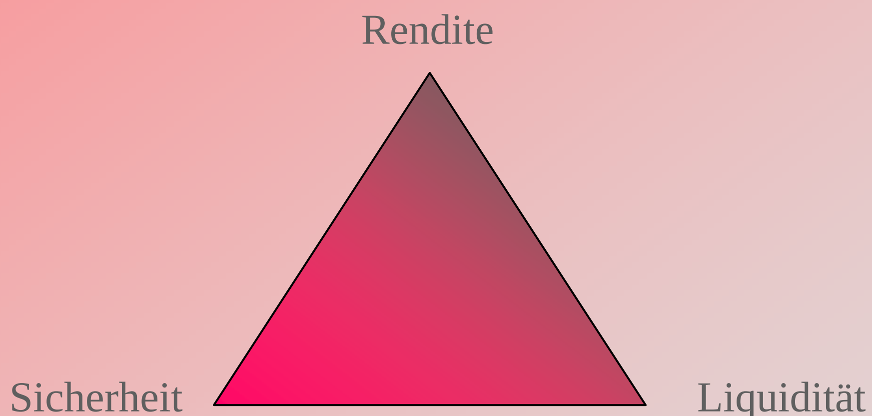
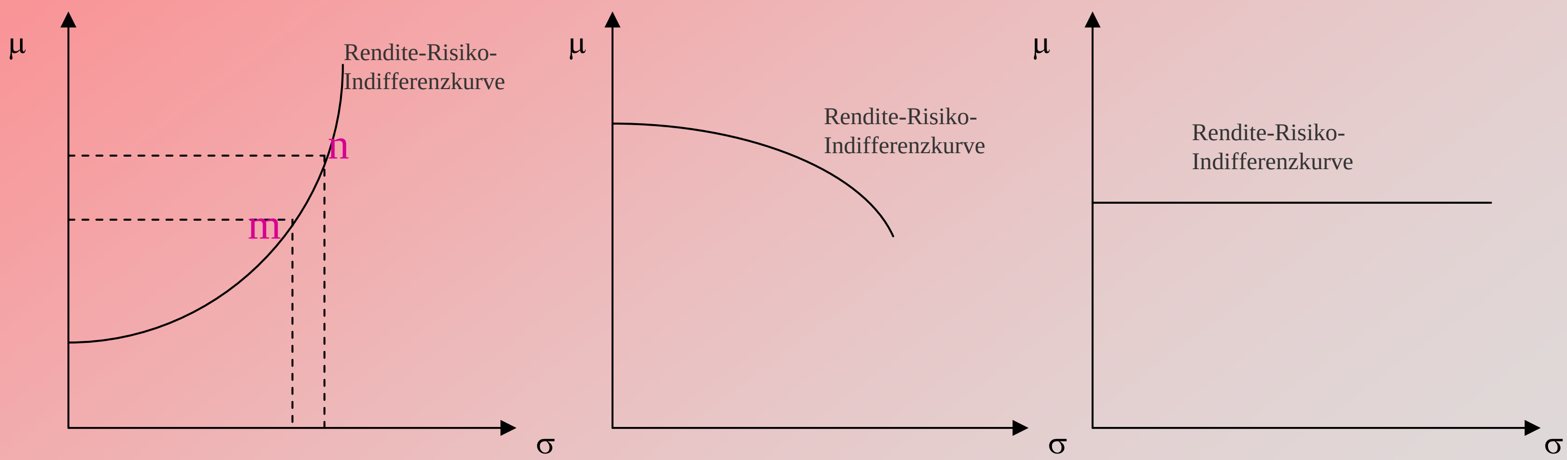


Abb. 4: magisches Dreieck der Geldanlage

1.2 Risikopräferenz

❖Die Bereitschaft zur Risikoübernahme hängt von der Einstellung jedes Anlegers zum betreffenden Anlageprojekt ab. Laut der individuellen Risikobereitschaft eines Anlageprojektes werden 3 Typen unterschieden, nämlich Risikoaversion(Risikoscheu), Risikofreude und Risikoneutralität. Die lassen sich wie folgt in Risk-Return-Diagrammen darstellen:

Abb. 5



Riskoaversion **Risikofreude** **Risikoneutralität**

$N(\sigma_m, \ \mu_m) = N(\sigma_n, \ \mu_n)$

2. Portfolioselektion

2.1 risikobehaftete Anlagekombination mit einer sicheren Anlagemöglichkeit

❖Die Formel von Endvermögen lässt sich wie folgt bezeichnet:

$$W(x_1,x_2) = (b-x_1-x_2) * (1+i) + (1+R_1) * x_1 + (1+R_2) * x_2 = b * (1+i) + x_1 * (R_1-i) + x_2 * (R_2-i) \quad (4)$$

Wobei x= risikobehaftete Anlage
b= Geldanlage am Anfang
i= Zinsensatz für sichere Anlage
R= Zufallsrendite

❖Die Formel der erwarteten Rendite wird wie folgt bezeichnet:

$$E[\, W(x_1,x_2)\,] =b(1+i)+ x_1(\mu_1-i)+x_2(\mu_2-i) \quad (5)$$

Wobei μ = die erwartete Rendite

❖Endwohlstand beim Endvermögen W: $F (x_1, x_2) = E[\, W (x_1, x_2)\,] - (a/2) * Var [\, W(x_1, x_2)\,]$, (6)

wobei a/2 = die Proportionalitätskonstante
$Var [\, W(x_1, x_2)\,]$ = Varianz des Endvermögens

1) wenn a=0 ist, gehört dieser Typ zur Risikoneutralität;
2) wenn a>0 ist, ist der Anleger risikoavers;
3) wenn a<0 ist, zählt dieser Typ zu Risikofreunden.

2.2 Kovarianz und Korrelationskoeffizient

2.2.1 Die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

❖ Ein Zufallsexperiment wird durchgeführt.Zwei Ergebnisse des Experiments Yund Z haben viele mögliche Realisationen: Y kann die Zahlenwerte y_1, y_2,......y_m annehmen und Z die Wert z_1,z_2,.....z_n.Die Ergebnisse sind zweidimensional, nämlich Wertepaare(y_j,z_k),j=1,2,...,m und k=1,2,....n. Es tritt bei dem Zufallsexperiment eines von mn möglichen Ergebnissen ein und dementsprechend müssen mn Wahrscheinlichkeiten gegeben sein. Sie werden mit zwei Indizes numeriert, p_{11},p_{12},....p_{jk},......,p_{mn}. p_{jk} >= 0 und ihre Summe muss 1 ergeben: für alle k=1,2,.....n; $p_{11} + p_{12} +.....+ p_{1n} + p_{21} + p_{22} +......p_{2n} +.....+ p_{m1} + p_{m2} +.....+ p_{mn} =1$

Abb.6: Eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y, Z

Wahrscheinlichkeiten	z_1	z_2	...	z_n
y_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
y_2	P_{21}	p_{22}	...	P_{2n}
...	...	...	...	...
y_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

Quelle: Spremann, K. (1996): Wirtschaft, Investition und Finanzierung , 5. Auflage, S. 506

2.2.2 Die beiden Randverteilungen

❖ Der Experimentator könnte von der Realisation von Z völlig absehen. Diese Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt bezeichnet:

$q_{y1=} p_{11} + p_{12} + \dots + p_{1n}$,
$q_{y2=} p_{21} + p_{22} + \dots + p_{2n}$,
$q_{ym=} p_{m1} + p_{m2} + \dots + p_{mn}$,
$q_{y1} + q_{y2} + \dots + q_{ym} = 1.$

❖ Analog dazu könnte man von der Realisation von Z völlig absehen. Diese Wahrscheinlichkeiten werden wie folgt bezeichnet:

$q_{z1=} p_{11} + p_{21} + \dots + p_{m1}$,
$q_{z2=} p_{12} + p_{22} + \dots + p_{m2}$,
$q_{zn=} p_{1n} + p_{2n} + \dots + p_{mn}$,
$q_{z1} + q_{z2} + \dots + q_{zn} = 1$

❖ Die beiden Randverteilungen als Ergänzng werden in die Tabelle der Wahrscheinlichkeiten aufgenommen:

Abb.7: Eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y, Z

Wahrscheinlichkeiten		z_1	z_2	…	z_n
		q_{z1}	q_{z2}	…	q_{zn}
y_1	q_{y1}	p_{11}	p_{12}	…	p_{1n}
y_2	q_{y2}	P_{21}	p_{22}	…	P_{2n}
…..		…	…	…	…
y_m	q_{ym}	p_{m1}	p_{m2}	…	p_{mn}

Quelle: Spremann, K. (1996): Wirtschaft, Investition und Finanzierung, 5. Auflage, S. 507

❖ Die Erwartungswerte und Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen Y bzw. Z lassen sich wie folgt bezeichnen:

$$E\,(Y) = q_{y1} * y_1 + q_{y2} * y_2 + ... + q_{ym} * y_m\,, \qquad (7)$$

$$Var\,(Y) = E[\,(Y - E\,(Y))^2\,] = q_{y1}\,(\,y_1 - E\,(Y))^2 + q_{y2}\,(\,y_2 - E\,(Y))^2 + ... + q_{ym}\,(\,y_m - E(Y))^2 \qquad (8)$$

2.2.3 Kovarianz Cov(Y,Z)

❖ Kowarianz wird bei Spremann so difiniert, dass sie ausdrücken soll, wie stark Y und Z miteinander variieren, und ist deshalb in Anlehnung an ein mittleres Produkt der Abweichung von Y und Z von ihren jeweiligen Erwartungswerten definiert:

$$Cov(Y,Z) = E\,[\,(Y - E\,(Y)) * (\,Z - E\,(Z))\,] \qquad (9)$$

Dazu nehmen wir ein Beispiel , das wie folgt in der Tabelle dargestellt wird:

Abb. 8 : Eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für Y, Z

Wahrscheinlichkeiten		z_1 = 50	Z_2 =100	z_3 =130
		q_{z1}=0,3	q_{z2} =0,2	q_{z3} =0,5
y_1 = 150	q_{y1}=0,6	0,2	0,1	0,3
y_2 =275	q_{y2}=0,4	0,1	0,1	0,2

E (Y) = 0,6 * 150 + 0,4 * 275 = 200,

E (z) = 0,3 * 50 + 0,2 * 100 + 0,5 * 130 = 100

$\mathrm{Cov}(Y, Z) = P_{11} * (y_1 - E(Y)) * (z_1 - E(Z)) + \ldots + P_{1n} * (y_1 - E(Y)) * (z_n - E(Z)) + P_{21} * (y_2 - E(Y)) * (z_1 - E(Z)) + \ldots + P_{2n} * (y_2 - E(Y)) * (z_n - E(Z)) + \ldots + P_{m1} * (y_m - E(Y)) * (z_1 - E(Z)) + \ldots + P_{mn} * (y_m - E(Y)) * (z_n - E(Z))$
= 0,2 * (150 - 200) * (100 - 100) + 0,3 * (150 - 200) * (130 - 100) + 0,1 * (275 - 200) * (50 - 100) + 0,1 * (275 - 200) * (100 - 100) + 0,2 * (275 - 200) * (130 - 100) = 125

2.2.4 Der Korrelationskoeffizient

❖ Korrelation

In Jahren, in denen hatte die erste Zufallsvariable Realisationen über (unter) ihrem Mittelwert, typischerweise auch hatte die zweite Zufallsvariable Realisationen über (unter) ihrem Mittelwert, werden die Zufallsvariablen als miteinander korreliert bezeichnet.

❖Der Korrelationskoeffizient wird als r bezeichnet:

$$\rho = \frac{Cov(Y,Z)}{Sd(Y)Sd(Z)} \qquad (10) \quad \text{wobei: } Var(Y) \neq 0 \text{ und } Var(Z) \neq 0; -1 \leqq \rho \leqq 1$$

❖Durch obengenanntes Beispiel wird der Korrelationskoeffizient verdeutlicht.

$Var(Y) = (150 - 200)^2 * 0,6 + (275 - 200)^2 * 0,4 = 3750$

$Var(Z) = 0,3 * (50 - 100)^2 + 0,2 * (100 - 100)^2 + 0,5 * (130 - 100)^2 = 1200$

$\rho = 125 / [(3750)^{1/2} * (1200)^{1/2}] \approx 0,059$

2.2.5 Eine Rechenregel

Zwei Formeln werden abgeleitet:

$E(cY + dZ) = c * E(Y) + d * E(Z)$ (11)

$Var(cY + dZ) = Var(cY) + Var(dZ) + 2Cov(cY, dZ)$ (12)
$= c^2 Var(Y) + d^2 Var(Z) +2 cd * Cov(Y, Z)$
$= c^2 Var(Y) + d^2 Var(Z) +2 cd * Sd(Y) * Sd(Z) * \rho$

Wobei c und d beliebige Koeffizienten sind. Sd ist die Abkürzung von der Standardabweichung.

2.2.6 Die notwendigen Bedingungen für Maximieren des Endwohlvermögens

Wir kennen schon die Formel des Endwohlvermögens: $F(x_1,x_2) = E[W(x_1,x_2)] - (a/2) *Var[W(x_1,x_2)]$, differenzieren wir diese Funktion partiell sowohl nach x_1 als auch nach x_2, und setzen die beiden Ableitungen gleich null, dann erhalten wir die notwendigen Bedingungen des Maximieren des Endwohlvermögens.

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = (\mu_1 - i) - a\, x_1 \sigma_1^2 - a\, x_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = (\mu_2 - i) - a\, x_2 \sigma_2^2 - a\, x_1 \sigma_1 \sigma_2 \rho = 0 \quad (14)$$

Eine Bedingung a>0 wird vorausgesetzt, werden beide Gleichungen danach in Matrixschreibweise formuliert und wie folgt bezeichnet:

$$a \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1 - i \\ \mu_2 - i \end{bmatrix}$$

Auf die beiden Seiten der Gleichung multipliziert man die Zahlen mit der Inverse der Matrix $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho \\ \sigma_1\sigma_2\rho & \sigma_2^2 \end{bmatrix}^{-1}$ und dividiert durch a. ($1-\rho^2 \neq 0$, sonst existiert die Lösung nicht.)

Wir können die optimalen Risikoanlagebeträge explizit angeben:

$X_{1opt} = (\mu_1 - i - (\rho\sigma_1/\sigma_2)(\mu_2 - i))/(a\sigma_1^2(1-\rho^2))$ (15)

$X_{2opt} = (\mu_2 - i - (\rho\sigma_2/\sigma_1)(\mu_1 - i))/(a\sigma_2^2(1-\rho^2))$ (16)

Ein Beispiel wird wie folgt angeführt:

Gesamtbetrag b = 100€;
Für sichere Anlage x : $R_0 = 0,3$;
Für risikobehaftete Anlage 1 : $\mu_1 = 0,4$; $\sigma_1^2 = 0,36$
Für risikobehaftete Anlage 2: $\mu_2 = 0,4$; $\sigma_2^2 = 0,49$
$\rho = 0,5$

Lösung:

Risikoaversion a = 1/b = 1/100 = 0,01;
(Grund: Durch die statistische Untersuchung von empirischen Entscheidungsverhalten zahlreicher privater Anleger wird verdeutlicht, dass die Risikoaversion a bei den meisten Menschen in der Größenordnung um 1/b liegt.)

$X_{1opt} = (\mu_1 - i - (\rho\sigma_1/\sigma_2)(\mu_2 - i))/(a\sigma_1^2(1-\rho^2)) = (0,4-0,3-(0,5 * (0,36)^{1/2} / (0,49)^{1/2})(0,4-0,3)) / (0,01*0,36$

$*(1-0,5^2)) \approx 21.164$€

$X_{2opt} = (\mu_2 - i - (\rho\sigma_2/\sigma_1) (\mu_1 - i))/(a\sigma_2^2(1-\rho^2)) \approx 11,338$€

3. Effiziente Portefeuilles

3.1 Effiziente Kurve

Wenn die folgenden Bedingungen erreicht werden, nennt Markowitz ein solches Depot **effizient:**

❖ Es gibt kein anderes Depot, das bei gleichem Ertrag ein geringeres Risiko oder

❖ bei gleich hohem Risiko einen höheren Ertrag aufweist.

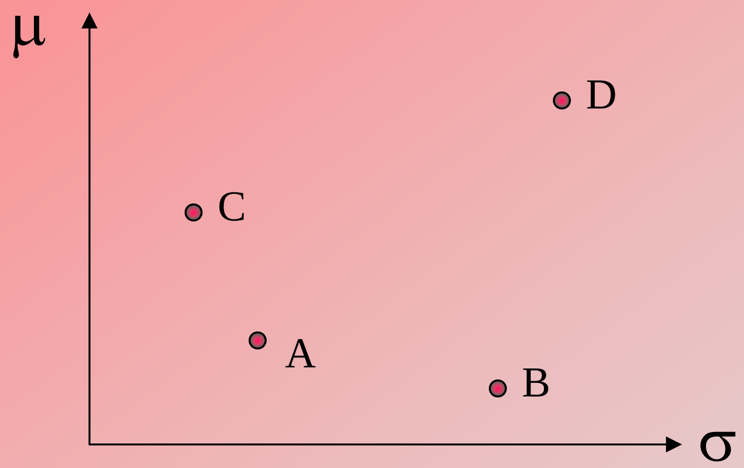
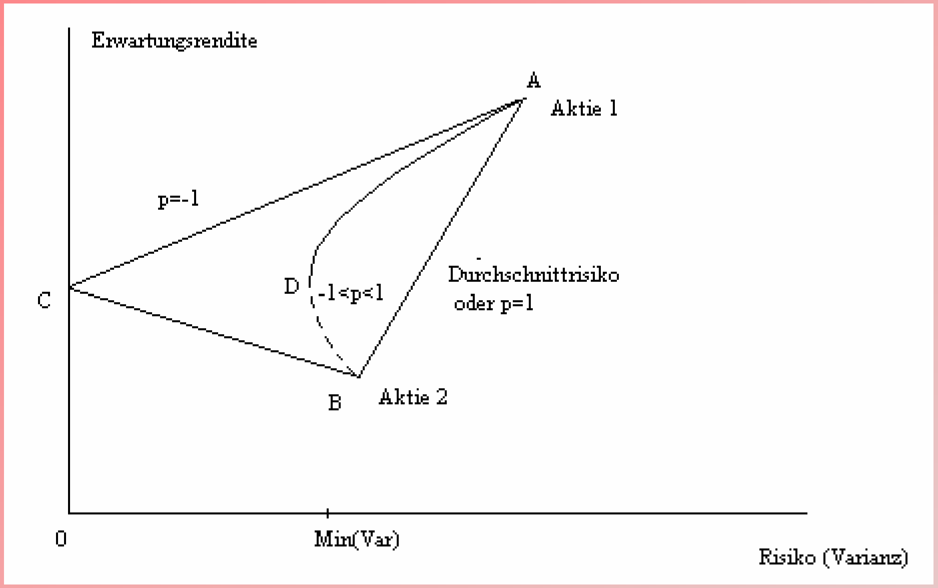


Abb. 10 Risk–Return-Diagramm

Portfolio A ist von C dominiert, B ist von A Und C dominiert. C und D sind effiziente Portfolios.

Abb.9 Zusammenhang zwischen Risiko und Rendite im zwei-Anlage-Fall



Quelle: Perridon, L. und Steiner, M. (2004): Finanwirtschaft der Unternehmung , 13. Auflage, S.268

$$R_p = t * R_2 + (1- t) * R_1 \qquad (17)$$

$$\mu_p = t * \mu_2 + (1- t) * \mu_1 \qquad (18)$$

$$\sigma_p = (t^2 * \sigma_2^2 + (1- t)^2 * \sigma_1^2 + 2t(1- t)\, \sigma_1\, \sigma_2 \rho)^{1/2} \qquad (19)$$

Wenn $\rho = -1$, kann man eine sichere Anlagekombination erzielen;
Wenn $-1 < \rho < 1$, ist diese Anlagekombination bessere als die vollständig korrelierte Anlagekombination;
Wenn $\rho = 1$, ist die Anlagekombination weder besser noch schlechter, sondern so wie jede der beiden Einzelanlagen.

Wenn t = 1/2 und die Portfolio wäre normalverteilt, nimmt die Normalverteilung mit Wahrscheinlichkeit von 0,6827 einen Wert an, der in einem Sigma-Band um den Erwartungswert liegt. Das ist das Intervall von $\mu - \sigma$ bis $\mu + \sigma$.

Wenn sie mit Wahrscheinlichkeit von 0,95 einen Wert annimmt, ist das Intervall von $\mu - 2\sigma$ bis $\mu + 2\sigma$.

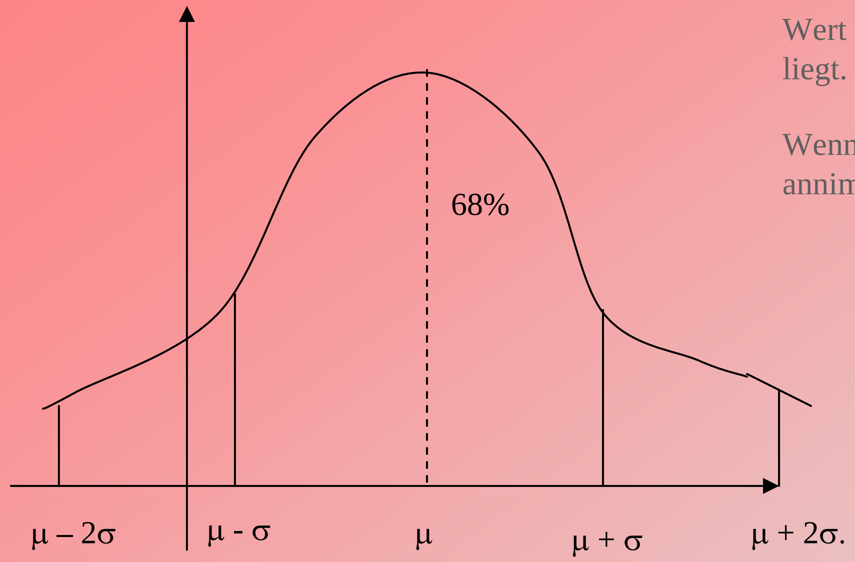


Abb. 10 die Normalverteilung

Die Formeln (18) und (19) mit Umformungen folgen:

$\mu_p = \mu_1 + t * (\mu_2 - \mu_1)$ (20)

$\sigma_p^2 = \sigma_1^2 + 2t * (\sigma_1 \sigma_2 \rho - \sigma_1^2) + t^2 * (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2 \rho)$ (21)

Man kann die Formeln (20) und (21) umschreiben als

$Y = a + b * t$ (22)

$Z=c + d * t + e * t^2$ (23)

Man gewinnt $t = (y-a) / b$ aus der Gleichung (22) und setzt dies in die Gleichung (23) ein.
Wir erhalten die Form:

$Z = h(y) = (c- (ad / b) + (ea^2 / b^2)) + ((d / b) – (2ae / b^2)) *y +(e / b^2) *y^2$ (24) ohne Leerverkäufe

Im Riskquadrat-Return-Diagramm werden die Renditen aller aus beiden Anlagen erzeugbaren Portfolios auf einer Parabel positioniert, die sich nach rechts öffnet.

Leerverkauf:

Man darf die Aktie verkaufen, die man nicht besitzt. Dadurch bekommt man den Verkaufserlös. Später muss man sie zurückerwerben.

Um der linken Scheitelpunkt der Parabel zu berechnen, differenzieren wir die Funktion Z von der Gleichung (23) nach t und erhalten die Gleichung d + 2et =0 . Mit Umformungen wird die Formel wie folgt bezeichnet:

$t = (\sigma_1(\sigma_1 - \sigma_2\rho)) / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_2\rho)$ (25)

❖Der Scheitelpunkt hat die Bedeutung, dass er effiziente von dominierten Portfolios trennt. Alle auf dem unterhalb des Scheitels liegenden Abschnitt der Parabel positionierten Portfolios sind dominiert, der Scheitel und alle rechts oberhalb positionierten Portfolios auf der Parabel sind effizient.

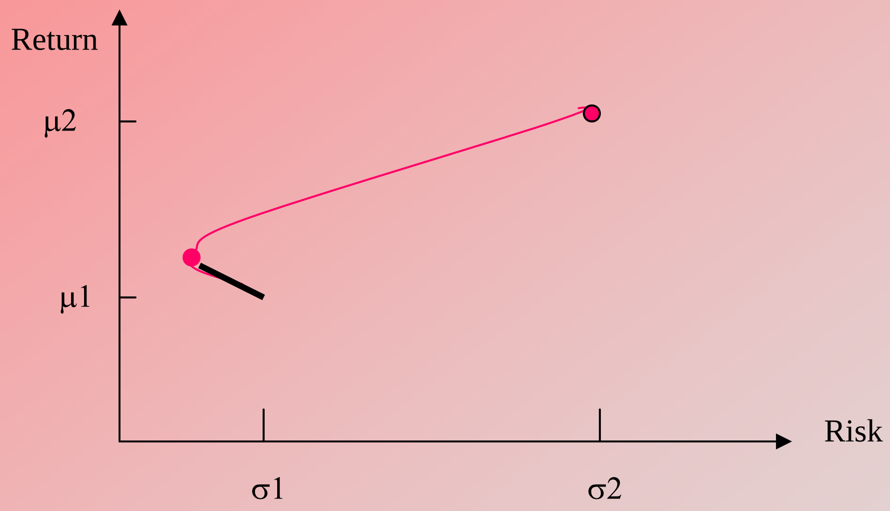


Abb. 11 Risk- Return-Diagramm (2-Anlage- Fall)

Die Betrachtung lassen sich auf mehr als 2 Aktien übertragen. Im untenstehenden Risk- Return-Diagramm wird 3 risikobehaftete Einzelanlagen ausgegangen.Zuerst werden die Einzelanlagen 1 und 2 kombiniert, anschließend werden 2 erzeugbare Portfolios A und B mit Einzelanlage 3 zu neuen Portfolios kombiniert.

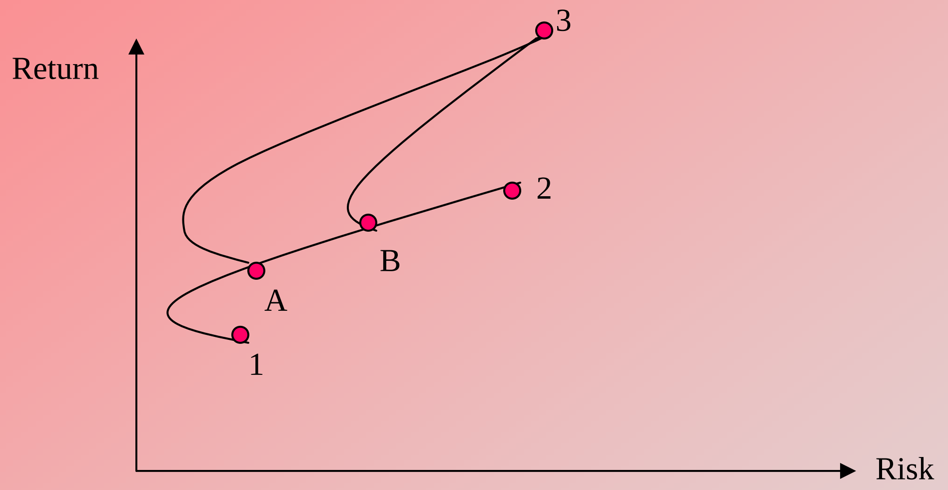
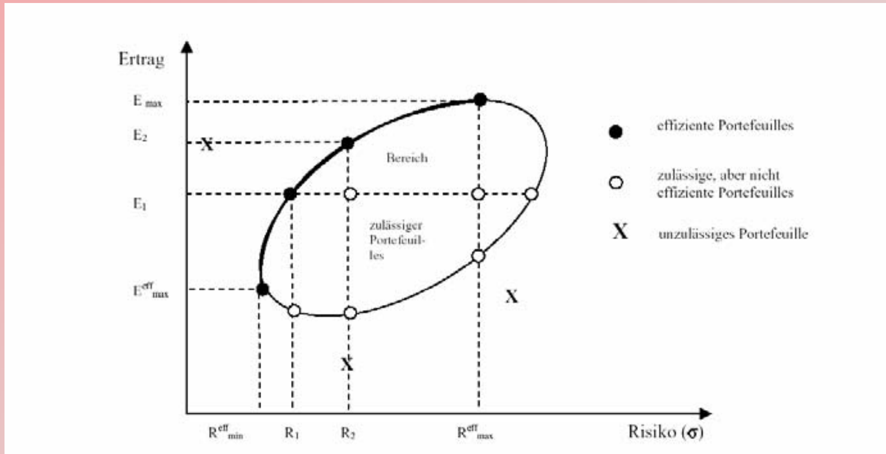


Abb. 12 Risk- Return-Diagramm (3-Anlage- Fall)

❖Von allen solchermaßen erzeugbaren Kurvenstücken interessiert nur die obere Einhüllende, sie ist die sogenannte Effizienzkurve.

❖Markowitz setzte sich in den frühren 60er Jahren zum Ziel, mit eienem Computer alle effizienten Portfolios zu bestimmen. Die Idee war, eine parametrische Optimierungs Aufgabe zu lösen. Formel lautete die Optimierungsaufgabe:
Maximiere $t_1\mu_1 + t_2\mu_2 + \ldots\ldots + . t_n\mu_n$. Über alle $t_1, t_{2\ldots\ldots\ldots}, t_n$ mit $0 =< t_j <= 1$,
Für $j = 1, 2, \ldots\ldots, n$, und $t_1 + t_2 + \ldots. + . t_n = 1\ldots$
Sowie

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} t_j\, t_k\, \sigma_j\, \sigma_\kappa \rho_{jk} = r^2 \qquad (26)$$



Quelle: Hielscher, Udo, Investmentanalyse, 1999, S. 62

Abb. 13: Unzulässige, zulässige und effiziente Portefeuilles

3.2 Kapitalmarktlinie

James Tobin hat 1958 völlig neuartig Aspekte aufgeworfen.
Das Portfolio, das im Tangentialpunkt positioniert ist, wird als Marktportefeuille definiert.
Alle reien Portfolios außer Marktportfolio sind dominiert.
Die an Effizienzkurve der Portefeuilles tangierte Linie heißt Kapitalmarktlinie.
Die Formel lässt sich so bezeichnen: $\mu_p = i + ((\mu_m - i) / \sigma_m)^* \sigma_p$
Alle effizienten Portefeuilles liegen auf der Kapitalmarktlinie.
Aus Formeln (15) und (16) ergibt sich für die Relation des Anteils t_m der zweiten Aktie zum $1-t_m$ der ersten Aktie im Marktportfolio M zu
$t_m / (1- t_m) = (\mu_2 - i - (\rho\sigma_2/\sigma_1) (\mu_1 - i))/(a\sigma_2^2(1-\rho^2)) / (\mu_1 - i - (\rho\sigma_1/\sigma_2)(\mu_2 - i))/(a\sigma_1^2(1-\rho^2))$ (27)

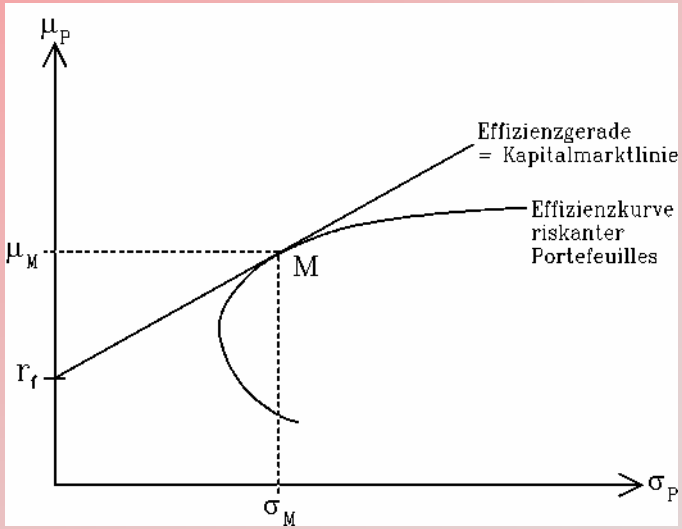


Abb. 14 Kapitalmarktlinie

Quellen:

Beike/Schlütz: Finanznachrichten lesen-verstehen-nutzen, 2 Auflage
Perridon/Steiner: Finanzwirtschaft der Unternehmung,13 Auflage
Spremann K. :Wirtschaft, Investition und Finanzierung, 5 Auflage